

# Analysis I

## Grundlagen der Logik und Mengenlehre

### Symbole:

$\neg$	Nicht	$\neg a \wedge \neg b = \neg(a \vee b)$
$\wedge$	Und	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \wedge (a \wedge c)$
$\vee$	Oder	
$\Rightarrow$	wenn, dann	
$\Leftrightarrow$	genau dann, äquivalent	

### Quantoren:

$\forall$	für alle	$\neg \forall a \Leftrightarrow \exists \neg a$
$\exists$	es existiert	$\neg \exists a \Leftrightarrow \forall \neg a$

### Mengenoperationen:

$\cup$	Vereinigung	
$\cap$	Durchschnitt	
$\complement$	Komplement	
$\times$	Kartesisches Produkt	
$P(a)$	Potenzmenge (Menge aller Teilmengen)	Immer $\emptyset$ und Menge selbst

### Def. Relation:

Eine Relation ist eine Teilmenge von  $A \times A$ .

### Def. Äquivalenzrelation:

Eine Relation mit den Eigenschaften: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität

### Def. Äquivalenzklasse

Keine Äquivalenzklasse ist leer.

*Beweis:* Wegen Reflexivität ist immer  $x$  enthalten

Zwei Äquivalenzklassen sind

- (1) identisch nämlich falls  $x \sim y$
- (2) disjunkt nämlich falls nicht  $x \sim y$

*Beweis:* (1) ein beliebiges  $z$  aus  $x$  ist auch in  $y$  und ein beliebiges  $z$  aus  $y$  ist auch in  $x$   
 (2) Indirekt: Annahme dass es ein gemeinsames gibt führt zu Widerspruch

### Satz über Äquivalenzrelationen

Jede Äquivalenzrelation in einer Menge  $A$  induziert eine Zerlegung von  $A$  in nichtleere, paarweise disjunkte Äquivalenzklassen.

### Def. Ordnungsrelation

Eine Relation mit den Eigenschaften: Reflexivität, Antisymmetrie, Transitivität

### Def. Totalordnung

Eine Ordnungsrelation, bei der zusätzlich gilt  $x \sim y$  oder  $y \sim x$ .

### Def. Abbildung oder Funktion

Eine Relation, die jedem Element aus  $A$  genau ein  $y$  aus  $B$  zuordnet.  $x \sim y$  und  $x \sim z \Rightarrow y = z$

### Def. surjektiv, injektiv, bijektiv

**Surjektiv:** Jedes Bild besitzt mindestens ein Urbild  
**Injektiv:** Wenn jedes Bild höchstens ein Urbild besitzt  
 (Urbilder ungleich  $\Rightarrow$  Bilder ungleich, Bilder gleich  $\Rightarrow$  Urbilder gleich)  
**Bijektiv:** Surjektiv und Injektiv

Im Falle von Bijektivität existiert die Umkehrabbildung.

### Def. Familie, Indexmenge

Spezialfall: Eine Familie mit Indexmenge  $\mathbb{N}$  nennt man Folge.

## Zahlenräume

### Natürlichen Zahlen

PEAND-Axiome

Prinzip der vollständigen Induktion

Natürliche Zahlen sind linear geordnet und sogar wohlgeordnet (jede Teilmenge besitzt kleinstes Element)

### Bemerkungen

1. Ein kleinstes Element ist eindeutig bestimmt. (*Beweis:* Annahme es gibt zwei  $\Rightarrow$  gleich)
2. In jeder (halb)geordneten Menge gilt (Wohlordnung  $\Rightarrow$  Totalordnung) (*Beweis:* Zweierpärchen)

### Def. Mächtigkeiten

Gleichmächtig: Falls es eine Bijektion zwischen den Mengen gibt

Weniger mächtig: Falls es eine Injektion in die größere Menge gibt

Endlich: Falls sie gleich einem Abschnitt von  $\mathbb{N}$  ist

Abzählbar unendlich: Falls eine Bijektion auf  $\mathbb{N}$  existiert

Überabzählbar: Sonst

Erweiterung auf  $\mathbb{Z}$  durch Darstellung von Lösungen der Gleichung  $n + x = m$  als Paare  $(m,n)$  und Zusammenfassung zu Äquivalenzklassen.

### Ganze Zahlen

Kommutativer Ring, Totalordnung, keine Wohlordnung, Nullteilerfrei

Erweiterung auf  $\mathbb{Q}$  durch Darstellung von Lösungen der Gleichung  $n \cdot x = m$  als Paare  $(m,n)$  und Zusammenfassung zu Äquivalenzklassen.

### Rationale Zahlen

Körper, Totalordnung, Kleinstes linear geordneter Körper, der  $\mathbb{N}$  enthält.

$\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}$  sind abzählbar. *Beweis:* 0,-1,1,-2,2 und Cantorsches Diagonalverfahren

### Reelle Zahlen

Körper, aber nicht alle Potenzen sind lösbar. *Beweis:*  $x^2=2$  nicht lösbar durch Widerspruchsbeweis Teilerfremdheit.

### Def. Beschränkt

Es existiert eine obere Schranke (alle Elemente der Menge sind kleiner als diese)

### Def. Supremum

Kleinste Obere Schranke. Eindeutig *Beweis:* Annahme, dass zwei  $\Rightarrow$  gleich  
 Falls Supremum / Infimum in  $A$  werden sie Maximum und Minimum genannt.

**Def. Ordnungsvollständigkeit, Supremumseigenschaft**

Ein Körper heißt Ordnungsvollständig, wenn er die sog. Supremumseigenschaft besitzt, d.h. jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt.

In jedem vollständig linear geordnetem Körper besitzt auch jede nach unten beschränkte Teilmenge ein Infimum. *Beweis:* Spiegelung an 0

$\mathbb{Q}$  nicht vollständig  $x^2 < 0$  besitzt kein Supremum.

Erweiterung von  $\mathbb{Q}$  auf  $\mathbb{R}$  durch DEDEKINDsche Schnitte.

**Satz 1.2.1**

Die Menge die sich so ergibt, ist linear geordnet, besitzt die Supremumseigenschaft und  $\mathbb{Q}$  kann ordnungsverträglich darin eingebettet werden.

*Beweis:* ---lang---

Es gibt nur einen vollständig linear geordneten Körper, der  $\mathbb{Q}$  enthält, genannt der Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen.

Ergänzt man  $\mathbb{R}$  um  $-\infty + \infty$ , so kann die Körperstruktur nicht fortgesetzt werden.

**Satz 1.2.3 (Archimedes)**

$\mathbb{R}$  ist archimedisch angeordnet. Es gibt ein  $n$  mit  $n \cdot x > y$ .

*Beweis:*  $y$  wäre sonst Supremum => Widerspruch

*Folgerungen:* Es gibt  $0 < 1/n < \varepsilon$  und  $n > y$  ist nicht beschränkt.

**Satz 1.2.4 ( $\mathbb{Q}$  liegt dicht in  $\mathbb{R}$ )**

Zwischen wie reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl.

*Beweis:* Archimedes und Wohlordnung von  $\mathbb{N}$

**Satz 1.2.5 (Existenz von Wurzeln)**

Es gibt für alle  $y$ :  $x^n = y$

*Beweis:*  $x^n < y$  bringt Widerspruch zu Supremumseigenschaft,  $x^n > y$  bringt Widerspruch zu Supremumseigenschaft

**Satz 1.2.6 (Prinzip der Intervallschachtelung)**

Jede monoton fallende Folge abgeschlossener Intervalle besitzt einen nichtleeren Durchschnitt.

*Beweis:* Rechte Seite der Intervalle und Linke Seite bilden Folge, die eine Obere Schranke bzw. Untere Schranke besitzt => Supremum

**Satz 1.2.7 ( $\mathbb{R}$  ist überabzählbar)**

*Beweis:* Rekursive Folge von Intervallen => ein Element liegt drinnen, das kein  $x$  ist.

Erweiterung auf  $\mathbb{C}$  damit alle  $x^n = y$  lösbar sind. D.h.  $-1 = i^2$

**Komplexe Zahlen**

Keine lineare Ordnung. Division durch Multiplikation mit konjugiert Komplexer.

**Arithmetische Vektorräume  $\mathbb{R}^n$** 

Skalarprodukt definiert mit Bilinearität, Symmetrie, Positive Definitheit

Euklidische Norm mit Positive Definitheit, Homogenität, Dreiecksungleichung

*Beweis:* Für 3: Schwarzsche Ungleichung

## Topologie des $\mathbb{R}^n$

### Normierte Räume

Ein reeller normierter Raum ist ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ , auf dem eine Längenfunktion oder Norm  $|\cdot|$  gegeben ist mit den Eigenschaften: Positive Definitheit, Homogenität, Dreiecksungleichung. Umgekehrte Dreiecksungleichung. *Beweis:*  $||x| - |y|| \leq |x - y|$

#### Def. Topologischer Grundbegriffe ( $\epsilon$ -Umgebung, Umgebungssystem)

##### Satz 2.1.1 (Hausdorfsche Trennungseigenschaft)

Zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y$  eines normierten Raumes gibt es Umgebungen mit leerem Durchschnitt.

*Beweis:*  $\epsilon = \frac{1}{2} |x - y|$  und Annahme, dass  $z$  Element des Durchschnitts erzeugt Widerspruch

#### Def. Offenheit, Abgeschlossenheit

$\emptyset$  und  $X$  sind selbst offen und abgeschlossen.  $\epsilon$ -Umgebungen sind offen. Offene Intervalle sind offen. Vollkugeln oder Abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossen. (auch mit Unendlich).

##### Satz 2.1.2

- Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.  
*Beweis:* Jedes  $x$  ist in einer offenen Menge. Quantorentausch.
- Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.  
*Beweis:* Jedes  $x$  ist in allen offenen Mengen, Quantorentausch durch Ersetzung von  $\epsilon$  durch Minimum der  $\epsilon$ .

##### Satz 2.1.3

In  $\mathbb{R}^n$  liefern 1-Norm, euklid. Norm und Max-Norm dieselben Umgebungssysteme und damit dieselben offenen Mengen.

*Beweis:* Beidseitige Inklusionen

*Folgerungen:* Man kann in  $\mathbb{R}^n$  mit runden oder eckigen  $\epsilon$ -Umgebungen rechnen.

#### Def. Kompakt, Beschränkt

##### Satz 2.1.4 (Heine-Borel)

Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

*Beweis:*

kompakt $\Rightarrow$ beschränkt	Kugeln um 0 bis Unendlich
kompakt $\Rightarrow$ abgeschlossen	$x$ aus Menge und $y$ aus Komplement, Hausdorfsche Trennungseigenschaft
abgeschlossen $\Rightarrow$ kompakt	Teilwürfel

## Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$

### Def. Konvergenz

Jeder Umgebung fast alle.  $\Rightarrow$  Konvergenzverhalten wird nicht verändert durch Abändern endlich vieler Folgenglieder.

##### Satz 2.2.2

Jede konvergente Folge ist beschränkt und ihr Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

*Beweis:* Maximum der endlich vielen Folgenglieder  $\Rightarrow$  Beschränkt. Fast alle würden in Umgebungen um die beiden Grenzwerte liegen (Hausdorfsche-Trennungseigenschaft) Widerspruch  $\Rightarrow$  Eindeutig

##### Satz 2.2.3 Rechenregeln für konv. Punktfolgen

*Beweis:* Geeignetes wählen von  $\epsilon$

**Satz 2.2.4**

Eine Punktfolge konv. genau dann gegen  $a$ , wenn jede Komponentenfolge gegen  $a$  konvergiert.  
*Beweis:*  $\Rightarrow$  Über Def. + Quantorentausch;  $\Leftarrow$  Durch  $m$  gleich Maximum aller  $m$ .

**Satz 2.2.5 (Sandwich-Theorem)**

*Beweis:* In jeder  $\epsilon$ -Umgebung liegen fast alle.  $a_k \in [x_k, y_k]$

**Satz 2.2.6 (Konvergenzkriterium für mon. Zahlenfolgen)**

Eine Monotone Zahlenfolge konv. genau dann, wenn sie beschränkt ist.  
*Beweis:*  $\Rightarrow$  nach Satz 2.2.2;  $\Leftarrow$  monoton + beschränkt: Supremum

**Def. Häufungspunkt**

Jede konv. Folge hat genau einen HP ihren Limes.

**Def. Teilfolge**

Jede Teilfolge einer konv. Folge konvergiert und besitzt denselben Grenzwert.

**Satz 2.2.8 (Bolzano-Weierstrass)**

1. Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}^n$  besitzt mindestens einen HP.
2. Jeder HP einer Folge in  $\mathbb{R}^n$  ist Grenzwert einer konvergenten Teilfolge.

*Beweis:* 1. Annahme es gibt keinen HP. Offene Überdeckung (in jeder nur endlich viele Folgenglieder), da kompakt (Heine-Borel) endlich viele Mengen  $\Rightarrow$  Nur endlich viele Folgenglieder – Widerspruch.

2. Rekursiv definierte Teilfolge für den HP.  $\epsilon=1/n$ . Jeder Umgebung liegt ein Folgenglied.

In  $\mathbb{R}$  gibt es einen größten und einen kleinsten HP.

**Satz 2.2.9**

Ist  $(x_k)$  eine beschränkte Zahlenfolge, dann  $\exists$  eindeutig der Limsup und Liminf.

**Def. Cauchyfolge**

Jede konv. Folge ist eine Cauchyfolge. *Beweis:* Cauchybetrag  $\rightarrow x + x$

**Satz 2.2.11 (Cauchy-Konvergenz Kriterium für Folgen)**

Eine Punktfolge in  $\mathbb{R}^n$  konvergiert genau dann, wenn sie Cauchyfolge ist.

*Beweis:*  $\Rightarrow$  siehe oben  $\Leftarrow$  Cauchyfolgen sind beschränkt (wähle  $\epsilon > 1$ ). Nach Bolzano-Weierstrass existiert ein HP und somit eine konvergente Teilfolge.  $\epsilon$ -Kriterium für diese Folge + Cauchy Kriterium  $+ -x_{k_l} + x_{k_l}$  ergibt allgemeines  $\epsilon$ -Kriterium

Nicht in jedem normierten Raum konvergieren alle Cauchy-Folgen. z.B. die Folge, die  $e$  ergibt nicht in  $\mathbb{Q}$ .

Normierte Räume, in denen jede Cauchyfolge konvergiert, heißen vollständig oder BANACH-Räume.

Insgesamt:

$\mathbb{R}^n$  ordnungsvollständig (Supremumseigenschaft)  $\Rightarrow$  Heine-Borel  $\Rightarrow$  Bolzano-Weierstrass  $\Rightarrow$   
 $\mathbb{R}^n$  vollständig (es gilt das Cauchy Kriterium)

Alle obigen Eigenschaften sind im Wesentlichen in archimedischen linear geordneten Körpern äquivalent.

**Def. Uneigentliche Konvergenz**

## Unendliche Reihen im $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}$

### Def. Unendliche Reihe, Summe

Alle Sätze aus 2.2 lassen sich sinngemäß auf die Reihen (als spez. Folgen) übertragen.

### Satz 2.3.1 (Notwendiges konv. Kriterium)

Die Glieder einer konv. unendlichen Reihe im  $\mathbb{R}^n$  bilden eine Nullfolge.

Hinreichendes div. Kriterium: Bilden sie keine Nullfolge, so ist die Reihe Divergent.

*Beweis:*  $(s_l) \rightarrow s \Rightarrow (s_{l+1}) \rightarrow s \Rightarrow (x_{l+1}) = (s_{l+1} - s_l) \rightarrow s - s = 0 \Rightarrow (x_l) \rightarrow 0$

### Satz 2.3.2 (Cauchysche konv. Kriterium für Reihen)

$$\text{Bem: } \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=p}^{\infty} x_k \text{ konv.}$$

## Rechenregeln für Reihen

### Klammersetzen

Bei einer konvergenten Reihe erhält man durch Setzen einfacher Klammern eine neue Reihe, die wieder konvergiert mit derselben Summe.

Weglassen von Klammern kann aber eine divergente Reihe erzeugen.

### Def. Alternierende Reihe

### Satz 2.3.3 (Leibnizsche Regel)

Eine altern. Reihe, bei der die Beträge der Glieder eine monotone Nullfolge bilden ist konvergent.

*Beweis:* Umklammern  $\Rightarrow$  eine monoton steigende beschränkte und eine monoton fallende beschränkte, mit gleichem Grenzwert

*Zusatz:* Fehlereinschätzung  $|s - s_l| \leq |x_{l+1}|$

### Def. Absolut konv. Reihen

### Satz 2.3.4 Absolut konvergente Reihen konvergieren

*Beweis:* Cauchy Kriterium + Dreiecksungleichung

Für Reihen in  $\mathbb{R}$  mit nichtnegativen Gliedern ist Konvergenz = absolute Konvergenz.

### Satz 2.3.5

Eine Reihe in  $\mathbb{R}$  mit nichtnegativen Gliedern konvergiert genau dann (absolut), wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

*Beweis:* Die Folge der Partialsummen ist monoton steigen und Satz 2.2.6

### Def. Majorante Minorante

### Satz 2.3.6 (Majoranten-/Minorantenkriterium)

1. Eine Reihe in  $\mathbb{R}$  mit einer konv. Majorante konvergiert (absolut)
2. Eine Reihe in  $\mathbb{R}$  mit einer diverg. Minorante divergiert

*Beweis:* 1. Cauchy Kriterium ab da, wo Majorantenkriterium nicht nur für fast alle sondern für alle gilt

2. Die  $x_k$  wären sonst eine Majorante von Minorante; Widerspruch

### Satz 2.3.7 (Quotientenkriterium)

*Beweis:* Konvergenz: Vergleich mit Geometrische Reihe

Divergenz: keine Nullfolge

**Satz 2.3.8 (Wurzelkriterium)**

*Beweis:* Konvergenz: Vergleich mit Geometrische Reihe  
Divergenz: keine Nullfolge

*Warnung:* es genügt nicht  $\leq 1$  für Konvergenz

*Folgerungen:* Erleichterte Verwendung durch Verwendung von Limita

**Def. Unbedingte Konvergenz****Satz 2.3.9 (kleiner Umordnungssatz)**

Jede absolut konv. Reihe ist unbedingte konvergent (und umgekehrt).

*Beweis:*  $\Rightarrow$  Umordnung vergrößern, bis alle bei Cauchy benötigten Glieder dabei sind.

**Stetige Abbildungen****Def. Stetigkeit****Satz 2.3.1 ( $\epsilon - \delta$  Kriterium für Stetigkeit)****Satz 2.4.2. Komposition stetiger Abbildungen ist stetig.**

*Beweis:* Über Definition und geeignete Inklusionen

**Def. Folgenstetigkeit****Satz 2.4.3**

Eine Abbildung ist genau dann stetig, wenn sie in  $x_0$  folgenstetig ist.

*Beweis:*  $\Rightarrow$  falls  $f$  stetig folgt es durch Anwendung der Definitionen

( $\Leftarrow$ ) nichtstetig  $\rightarrow$  nicht folgenstetig (durch Anwendung der Definitionen)

**Satz 2.4.4 (Alle gewöhnlichen Rechenoperationen sind Stetig)****Satz 2.4.5**

Eine vektorwertige Abbildung ist genau dann stetig, wenn jede Komponentenfunktion stetig ist.

*Beweis:* Nach Satz 2.4.4.

**Def. Konvergiert bei Annäherung  $x \rightarrow x_0$** 

Dieser Grenzwert ist eindeutig. Rechenregeln für konv. Punktfolgen übertragen sich.

**Eigenschaften Stetiger Abbildungen****Satz 2.4.7 (Permanenzprinzip)**

Ist  $f$  in  $x_0$  stetig mit  $f(x_0) > 0$ , dann gibt es eine ganze Umgebung  $U$  von  $x_0$  mit  $f(x) > 0$ .

*Beweis:* Folgt direkt aus Stetigkeit

**Satz 2.4.8 (Hauptsatz über stetige Abb. auf Kompakta)**

Bei einer stetigen Abbildung ist das Bild einer Kompakten Menge  $K$  wieder kompakt.

*Beweis:* Offene Überdeckung von  $f[x]$  wird durch Stetigkeit zu offener Überdeckung von  $K$  (Kompakt)

**Satz 2.4.9 (Satz von Maximum und Minimum)**

Eine stetige Funktion  $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Kompakten Menge  $K$  ist beschränkt und besitzt ein (globales) Maximum und Minimum.

*Beweis:* Hauptsatz über stetige Abb. + Heine-Borell

## Def. Gleichmäßige Stetigkeit

### Satz 2.4.10 (Satz über gleichmäßige Stetigkeit)

Eine stetige Abb.  $f$  auf einer nichtleeren Kompakten Menge ist dort auch gleichmäßig stetig.

*Beweis:* Offene Überdeckung von  $K$  mit Dreiecksungleichung

### Satz 2.4.11 (Zwischenwertsatz / ZWS)

Die Funktion  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Dann ex. zu jedem Wert  $c$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = c$ .

*Beweis:* Das Supremum der Menge aller Elemente kleiner als  $c$  erfüllt die Eigenschaft. Da  $f(\sup) < c$  und  $f(\sup) > c$  mit dem Permanenzprinzip einen Widerspruch zum Supremum gibt.

*Folgerung:* (Nullstellensatz von Bolzano) Eine Funktion, die das Vorzeichen ändert besitzt mindestens eine Nullstelle.

*Folgerung:* (Erhalt des Zusammenhangs) Ein Bild eines beliebigen Intervalls  $I$  einer Stetigen Funktion ist wieder ein Intervall.

Insbesondere ist das Bild eines abgeschlossenen Intervalls wieder ein abgeschlossenes Intervall.

*Beweis:* Anwendung des Zwischenwertsatzes auf alle Elemente des Intervalls.  $I$  ist kompakt (Heine-Borell) damit ist das Bild nach 2.4.8 auch kompakt und damit abgeschlossen.

Das Bild eines offenen Intervalls braucht nicht offen zu sein!

## Monotone Funktionen

Bei einer stetigen und bijektiven Funktion ist die Umkehrfunktion i.A. nicht stetig. Bei Bijektionen auf Intervallen kann das nicht passieren.

### Satz 2.4.12

Eine stetige Funkt auf einem Intervall ist genau dann injektiv, wenn sie streng monoton ist.

*Beweis:*  $\Leftarrow$  klar

$(\Rightarrow)$  falls nicht monoton, so gibt es nach dem Zwischenwertsatz Elemente, die gleiche Bilder haben.  $\rightarrow$  nicht injektiv

### Satz 2.4.13

$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}$  sei auf dem Intervall stetig und bijektiv. Dann ist auch die Umkehrfunktion  $f^{-1} : J \rightarrow I$  stetig.

*Beweis:* Bilder Umgebungen von  $x_0 = f^{-1}(y_0)$  sind auch Umgebungen von  $y_0$ , die die Stetigkeit und Monotonie (Bijektiv) von  $f$  ergeben die Stetigkeit von  $f^{-1}$ .

Bijektionen bei denen  $f$  und  $f^{-1}$  stetig sind heißen Homöomorphismen.

## Funktionsfolgen

### Def. Funktionsfolgen konvergent / Grenzfunktion

#### Def. Gleichmäßige Konvergenz

Veranschaulichung in  $\mathbb{R}$ : Die Graphen der Glieder  $f_k$  liegen für  $k \geq m$  ganz in einem  $\varepsilon$ -Streifen um die Grenzfunktion.

### Satz 2.5.1

Jede glm. konv. Funktionenfolge/reihe konvergiert auch punktweise und zwar gegen die Grenzfunktion/Summe. Die Umkehrung gilt i.a. nicht.



**Satz 2.5.2**

Sei  $f_k$  stetig. Dann gilt:

1.  $(f_k : D \rightarrow K)_{k \in \mathbb{N}}$  glm. konvergent  $\Rightarrow f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$  (in  $x_0$ ) stetig
2.  $\left( \sum_{k=1}^l f_k \right)_{k \in \mathbb{N}}$  glm konvergent  $\Rightarrow s = \sum_{i=1}^{\infty} f_k$  (in  $x_0$ ) stetig

*Beweis:* Aus Definitionen + Dreiecksungleichung.

**Folgerung (Vertauschung von Grenzwerten)**

Falls die Grenzwerte existieren gilt

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$

*Beweis:* Es existiert eine stetige Fortsetzung.

**Satz 2.5.3 (Cauchy Kriterium für glm. Konvergenz)**

*Beweis:*  $\Rightarrow$  Wie bei Punktfolgen, Dreiecksungleichung

$\Leftarrow$  Folgt logisch aus Cauchy Kriterium für Punktfolgen und  $\lim f_k(x) \rightarrow f(x)$

**Satz 2.5.4 (Majorantenkriterium für glm. Konvergenz)**

Besitzt eine Funktionenreihe eine (gleichmäßig) konvergente Majorante, d.h. eine konv. Reihe in  $\mathbb{R}$  mit nichtnegativen Glieder  $c_k$ , für die gilt:  $|f_k(x)| \leq c_k$  für alle  $x \in D$  und fast alle  $k \in \mathbb{N}$ , dann

konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  (absolut) und gleichmäßig.

*Beweis:* Folgt aus dem Cauchy Kriterium und der Abschätzung mit  $c_k$ .